5. Complex-Banach Space ニ於ケルワ級数ニ就テ

霜田伊左衛（阪大）

（10月11日受付）

Complex-Banach Space E ノ上デ定義セラレ Complex-Banach Space E' ノ値ヲトル函数 $p(x)$ $(x \in E)$ ガ (i) $x, y \in E$ ナルトキ $p(x+\alpha y) = \sum_{0}^{n} \alpha^{\nu} p_{\nu}(x, y)$ (ii) アル x, y ニ対シテ $p_{n}(x, y) \neq 0$ (iii) E ノ各点デ定義セラレ且連續, (iv) $p(\alpha x) = \alpha^{n} p(x)$ ナルトキ p ヲ n 次ノ斉次多項式ト云フ。

今 $h_n(x)$ ヲ n 次ノ斉次多項式トシタトキ $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ ヲ抽象ワ級数ト云フ。

定義 1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ ニ於テアル実数 λ ガ存在シテ $r < \lambda$ ナルトキ $\|x\| \leq r$ ニ於テ $\|f(x)\| \leq M_r$, 又 $r > \lambda$ ナルトキ $\|x\| \leq r$ ニ於テ $f(x)$ ハ正則且有界トハナラナイ。

コノトキ λ ヲ $f(x)$ ノ有界半径ト名付ケル。

定義 2. アル実数 τ ガ存在シ $\|x\| < \tau$ ナルトキ $f(x)$ ハ正則デ $r > \tau$ ナルトキ $\|x\| < r$ デ $f(x)$ ハ正則トナラナイ。

[定理] $$\overline{\lim}\sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1}\|h_n(x)\|}=\frac{1}{\lambda}$$

$\|x\|\leq 1$ ニ含マレル凡ユル Compact set G ノ集合ヲ $\mathfrak{G}$ トスルトキ

$$\sup_{G\in\mathfrak{G}}\overline{\lim}\sqrt[n]{\sup_{x\in G}\|h_n(x)\|}=\frac{1}{\tau}$$ 一般ニ $\tau\geq\lambda$ トナル。

[註] $\tau>\lambda$ ナル例ハ後ニ述ベル。

[証明] 殆ンド同様ニ証明サレル故 τ ニツイテノミ行フ。

(i) $\|y\|<\tau$ ニ於テ $f(y)$ ハ正則トナルコトノ証明

ε ヲ任意ノ正数トスルトキ $\|y\|\leq\tau-2\varepsilon$ ニ含マレル注意ノ Compact set G' ニ於テ $G'\ni y$ ナルトキ $x=y/\tau-2\varepsilon$ トオケバ x ノ集合ハ $\|x\|\leq 1$ ニ於ケル Compact set G トナル。

$$\sup_{G\in\mathfrak{G}}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\sup_{x\in G}\|h_n(x)\|}=\frac{1}{\tau}$$ ナル故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sup_{x\in G}\|h_n(x)\|}\leq\frac{1}{\tau}$$

$$\sqrt[n]{\sup_{x\in G}\|h_n(x)\|}\leq\frac{1}{\tau-\epsilon},\ n\geq n_0(\varepsilon)$$

$$\|h_n(x)\|\leq\frac{1}{(\tau-\varepsilon)^n},\ n\geq n_0(\varepsilon),\ x\in G$$

$$\therefore\ \|h_n(y)\|=\|h_n(x)\|(\tau-2\varepsilon)^n\leq\left(\frac{\tau-2\varepsilon}{\tau-\varepsilon}\right)^n\quad y\in G'.$$

故ニ $\sum h_n(y)$ ハ G' デ一様收斂スル。ε 及ビ G' ハ任意ナル故 A E Taylor 氏ノ定理[1]ニヨリ $f(y)$ ハ $\|y\|<\tau$ デ正則トナル。

---

[1] Analytic function in general analysis, Annalic And R. Sai la Normale Superiore di Pisa, II. Vol. VI, 11.

「(ii) $r > \tau$ ナルトキハ $\|y\| < r$ デ正則トスレバ不合理ナルコトノ証明。」

$0 < \varepsilon < \dfrac{r-\tau}{4}$ ニ対シ $f(x)$ ハ $\|x\| \leq \lambda + 4\varepsilon$ デ正則トナル。従ツテ $\|y\| < \tau + 3\varepsilon$ ニ含マレル任意ノ Compact set G' ニ於テ $y \in G'$ ノトキ $|\alpha| = \dfrac{\tau+4\varepsilon}{\tau+3\varepsilon}$ $\alpha y = y'$

トスレバ y' ハ $\|y'\| \leq \tau + 4\varepsilon$ ニ含マレル Compact set G'' トナルカラ $\|f(y')\| \leq M_{G''}$ $(y' \in G'')$ トナル。又容易ニ分ル様ニ

$$h_n(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\alpha y)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha, \quad \left(C : |\alpha| = \frac{\tau+4\varepsilon}{\tau+3\varepsilon}, y \in G' \right)$$

$$\therefore \quad \|h_n(y)\| \leq \frac{M_{G''}}{|\alpha|^n} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ $\sup\limits_{G \subset R} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup\limits_{x \in G} \|h_n(x)\|} = \dfrac{1}{\tau}$ ナル故 ε ニ対シテ G ガ定マリ $\overline{\lim} \sqrt[n]{\sup\limits_{x \in G} \|h_n(x)\|} \geq \dfrac{1}{\tau+\varepsilon}$

従ツテ $n_1 < n_2 < n_3 < \quad < n_\nu < \cdots$ ガアリ

$$\sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_{n_\nu}(x)\|} \geq \frac{1}{\tau+2\varepsilon}$$

従ツテ n_ν ニ対シテ x_ν ガ G ノ中ニアリ

$$\|h_{n_\nu}(x_\nu)\| \geq \frac{1}{(\tau+3\varepsilon)^{n_\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

今 $y = x(\tau+3\varepsilon)$ $(x \in G)$ ノ集合ヲ G' トスレバ G' ハ $\|y\| \leq \tau + 3\varepsilon$ ニ含レル Compact set トナル。然ルニ $y_\nu = x_\nu(\tau+3\varepsilon)$ トスルト $\|h_{n_\nu}(y_\nu)\| \geq 1$ $(\nu = 1, 2, \quad) \cdots (2)$

(1) (2) ハ矛盾スル。

τ > λ ナル例トシテ complex (l_2)-space ニ於テ
函数 $f(x) = x_1 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^n + \cdots\cdots$
ヲ考ヘル。 $\overline{\lim}\sqrt[n]{\sup\limits_{\|x\|=1}\|h_n(x)\|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n} = 1$

ナル故 λ = 1

次ニ $\|x\| \le 1$ ニ含レル Compact set G ニ対シテハ

$\sum a_n^2 < \infty$ $(a_n > 0)$ ナル $\{a_n\}$ ガアリ 任意ノ m ニ対シ

$\sum\limits_{m=n}^{\infty}|x_m|^2 \le \sum\limits_{m=n}^{\infty} a_n^2$ ナル故

$$\sup_{x\in G} n|x_n|^n \le n\left(\sqrt{\sum_{m=n}^{\infty} a_m^2}\right)^n$$

$$\therefore\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\sup_{x\in G} n|x_n|^n} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{n}^{\infty}|a_m|^2}$$

$= 0$ ∴ G ハ任意ナル故 $\tau = \infty$

即チ $f(x)$ ハ (l_2)-space デ regular トナリ
而モ $r > 1$ ナラバ $\|x\| < r$ デ有界デナイ。
念ノタメニ $x^{(n)} = (0, 0, \cdots 1 \cdots)$ (n番目ノ座標ハ 1) デハ $|f(x^{(n)})| = n$ トナリ有界性ガ破レル (以上)